

STUDIO DI FUNZIONE DI DUE VARIABILI

SOMMA DI DUE QUADRATI

Funzione data :

$$z = x^2 + y^2 \quad (1)$$

1. Simmetria:

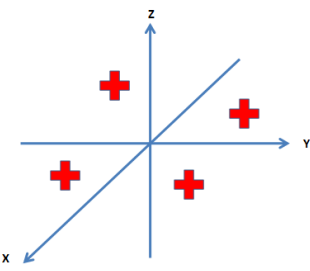
Simmetrica rispetto all'asse z, perché sostituendo (x) con (-x) ed (y) con (-y) si ottiene sempre la stessa (z).

2. Dominio:

Il dominio è l'intero campo reale (\mathbb{R}^2)

3. Segni:

x	y	x^2	y^2	x^2+y^2	Quadrante Piano xy
+	+	+	+	+	I
-	-	+	+	+	III
-	+	+	+	+	II
+	-	+	+	+	IV



4. Ricerca dei massimi e minimi relativi con il Metodo della Matrice Hessiana

- Derivate

Derivate parziali prime rispetto a (x) e rispetto a (y) :

$$\partial \frac{x^2+y^2}{\partial x} = 2x \quad (2)$$

$$\partial \frac{x^2+y^2}{\partial y} = 2y \quad (3)$$

Derivate parziali seconde rispetto a (x) e rispetto a (y) :

$$\partial^2 \frac{x^2+y^2}{\partial x^2} = 2 \quad (4)$$

$$\partial^2 \frac{x^2+y^2}{\partial y^2} = 2 \quad (5)$$

Derivate parziali seconde miste rispetto a (x) e a (y) :

$$\partial^2 \frac{x^2+y^2}{\partial x \partial y} = 0 \quad (6)$$

$$\partial^2 \frac{x^2+y^2}{\partial y \partial x} = 0 \quad (7)$$

Nota: TEOREMA Di SCHWARTZ – (Teorema dell'inversione dell'ordine di derivazione)

Le derivate parziali miste di una funzione di due variabili continua e derivabile con derivate prima e seconde continue sono coincidenti.

Per trovare punti critici $\mathbf{P}(x_0, y_0)$ occorre risolvere il sistema che si ottiene uguagliando a zero le due derivate parziali prime :

$$\begin{cases} \partial \frac{x^2+y^2}{\partial x} = 2x = 0 \\ \partial \frac{x^2+y^2}{\partial y} = 2y = 0 \end{cases} \quad (8)$$

I da cui si ricava

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad (9)$$

Il punto critico $P(x_0, y_0)$ è situato nell'origine degli assi.

- **Determinante della Matrice Hessiana (H)**

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 (x^2+y^2)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 (x^2+y^2)}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 (x^2+y^2)}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 (x^2+y^2)}{\partial y^2} \end{pmatrix} \quad (10)$$

$$\det H = \frac{\partial^2 (x^2+y^2)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 (x^2+y^2)}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 (x^2+y^2)}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial^2 (x^2+y^2)}{\partial y \partial x} \quad (11)$$

Si possono avere i seguenti casi :	se : $\det H$ in $P(x_0, y_0)$	e: $\frac{\partial^2 (x^2+y^2)}{\partial x^2}$ in $P(x_0, y_0)$	allora:
1	> 0	< 0	$P(x_0, y_0)$ è un punto massimo di relativo
2	> 0	> 0	$P(x_0, y_0)$ è un punto di minimo relativo
3	< 0		$P(x_0, y_0)$ è un punto di sella
4	= 0		si ha un caso dubbio e con questo metodo non si può stabilire se in $P(x_0, y_0)$ vi è un massimo o un minimo

Nella fattispecie si ha :

$$\det H = (2 \cdot 2) - (0 \cdot 0) = 4 \quad (12)$$

Siccome il determinante della matrice Hessiana è positivo, ma anche la derivata seconda di x è positiva, si è in presenza di un minimo.

5. Esame della funzione in un intorno dell'origine degli assi :

Quando:

- x tende a zero $z = y^2$: ciò significa che sul piano zy si ha una parabola ascendente passante per l'origine;
- y tende a zero $z = x^2$: ciò significa che sul piano zx si ha una parabola ascendente passante per l'origine;
- sia y che x tendono contemporaneamente a zero il limite è uguale a zero;

ciò conferma che nell'origine degli assi si trova un minimo.

6. Osservazione:

Si tratta in pratica di un paraboloido.

