STUDIO DI FUNZIONE DI DUE VARIABILI

DIFFERENZA DI DUE QUADRATI

Funzione data :

$$z = x^2 - y^2 \quad (1)$$

1. **<u>Simmetria:</u>**

Simmetrica rispetto all'asse z, perché sostituendo (x) con (- x) ed (y) con (-y) si ottiene sempre la stessa (z).

Inoltre è simmetrico rispetto ai piani xz ed yz perché cambiando di segno le variabili misurate a partire da tali piani la funzione non cambia.

2. **<u>Dominio:</u>**

Il dominio è l'intero campo reale ($\mathbb{R}^2$)

3. **<u>Segni:</u>**

x	**y**	**x^2**	**y^2**	**x^2- y^2**			
				x^2- y^2	**per x = y e per -x = -y**	**per x > y**	**per x < y**
+	**+**	**+**	**+**	**±**	**0**	**+**	**-**
-	**-**	**+**	**+**	**±**	**0**	**+**	**-**
-	**+**	**+**	**+**	**±**	**0**	**+**	**-**
+	**-**	**+**	**+**	**±**	**0**	**+**	**-**
La funzione si annulla lungo le bisettrici del piano xy							

4. Ricerca dei massimi e minimi relativi con il Metodo della Matrice Hessiana

- **Derivate**

Derivate parziali prime rispetto a (x) e rispetto a (y) :

$$\partial \ \frac{x^2-y^2}{\partial x} = 2x \quad (2)$$

$$\partial \ \frac{x^2-y^2}{\partial\, y} = -2y \quad (3)$$

Derivate parziali seconde rispetto a (x) e rispetto a (y) :

$$\partial^2 \ \frac{x^2-y^2}{\partial x^2} = 2 \quad (4)$$

$$\partial^2 \ \frac{x^2-y^2}{\partial y^2} = -2 \quad (5)$$

Derivate parziali seconde miste rispetto a (x) e a (y) :

$$\partial^2 \ \frac{x^2+y^2}{\partial x \partial y} = 0 \quad (6)$$

$$\partial^2 \ \frac{x^2+y^2}{\partial y \partial x} = 0 \quad (7)$$

> Nota: TEOREMA Di SCHWARTZ – (Teorema dell'inversione dell'ordine di derivazione)
>
> Le derivate parziali miste di una funzione di due variabili continua e derivabile con derivate prima e seconde continue sono coincidenti.

Per trovare punti critici **P(x_0,y_0)** occorre risolvere il sistema che si ottiene uguagliando a zero le due derivate parziali prime :

$$\begin{cases} \partial \ \frac{x^2-y^2}{\partial x} = 2x = 0 \\ \partial \ \frac{x^2-y^2}{\partial\, y} = -2y = 0 \end{cases} \quad (8)$$

I da cui si ricava

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad (9)$$

Il punto critico **P(x_0,y_0)** è situato nell'origine degli assi.

- **Determinante della Matrice Hessiana (H)**

$$\boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} \partial^2 \frac{x^2-y^2}{\partial x^2} & \partial^2 \frac{x^2-y^2}{\partial x \partial y} \\ \partial^2 \frac{x^2-y^2}{\partial y \partial x} & \partial^2 \frac{x^2-y^2}{\partial y^2} \end{pmatrix} \quad (10)$$

$$\boldsymbol{det\ H} = \partial^2 \frac{x^2-y^2}{\partial x^2} \cdot \partial^2 \frac{x^2-y^2}{\partial y^2} - \partial^2 \frac{x^2-y^2}{\partial x \partial y} \cdot \partial^2 \frac{x^2-y^2}{\partial y \partial x} \quad (11)$$

Si possono avere i seguenti casi :	**se :** $\boldsymbol{det\ H}$ **in P(x_0,y_0)**	**e:** $\partial^2 \frac{x^2-y^2}{\partial x^2}$ in **P(x_0,y_0)**	**allora:**
1	**> 0**	**< 0**	P(x_0,y_0) è un punto massimo di relativo
2	**> 0**	**> 0**	P(x_0,y_0) è un punto di minimo relativo
3	**< 0**		P(x_0,y_0) è un punto di sella
4	**= 0**		si ha un caso dubbio e con questo metodo non si può stabilire se in P(x_0,y_0) vi è un massimo o un minimo

Nella fattispecie si ha :

$$\boldsymbol{det\ H} = (+2) \cdot (-2) - (0 \cdot 0) = -4 \quad (12)$$

Siccome il determinante della matrice Hessiana è negativo si è in presenza di un punto di sella.

5. **Esame della funzione in un intorno dell'origine degli assi :**

Quando:

- x tende a zero $z = - y^2$: ciò significa che sul piano zy si ha una parabola discendente passante per l'origine;
- y tende a zero $z = x^2$: ciò significa che sul piano zx si ha una parabola ascendente passante per l'origine;
- sia y che x tendono contemporaneamente a zero il limite è uguale a zero;

quanto conferma che nell'origine degli assi si trova un punto di sella.

6. **<u>Osservazione:</u>**

Si tratta in pratica di una sorta di paraboloide iperbolico.