



LE CURVE A “S” DI UN PROGETTO E LA FUNZIONE DI GOMPERTZ

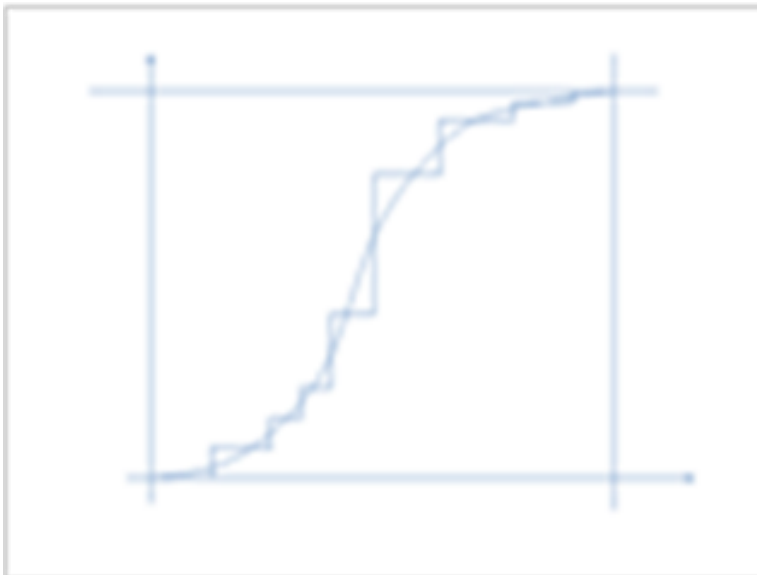
Un mezzo euristico per un invito all’approfondimento

R. Morelli – IEng MIET , Consulente, Libero professionista (Parte I)

P. Lucibello – Dott. Ing., Dirigente, Sogin S.p.a. (Parte II)

La curva a «S» di un progetto nella realtà

- E' una curva a gradini che integra risorse (per es. costi, ore, mezzi, etc.) e tempi e si può approssimare a una funzione continua (per interpolazione).



N.B. Per approfondimenti vedasi *paper* presentato ad AICE

- Piano e programma diventano in sintesi integrabili (da una o più funzioni matematiche).



Nel caso dei Costi di un Progetto

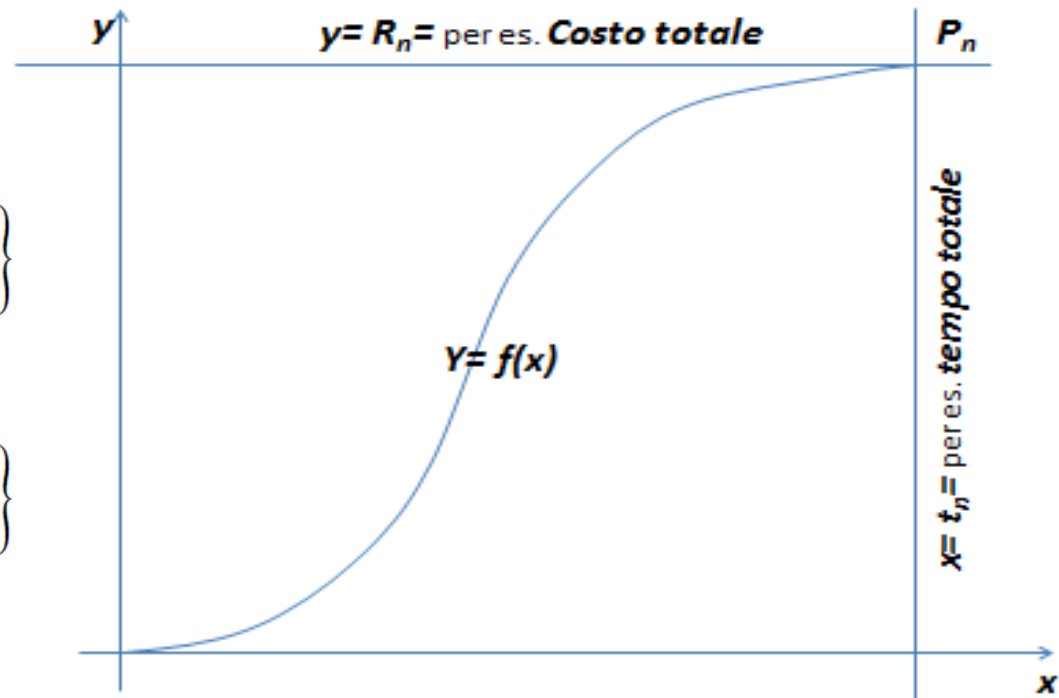
L'area sottesa dalla curva è indice di onerosità finanziaria

□ La fine progetto si trova con le soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} y = R_n \\ y = f(x) \end{cases}$$

oppure del sistema:

$$\begin{cases} x = t_n \\ y = f(x) \end{cases}$$





Stretta relazione tra Risorse e Risorse Cumulate di una Curva a «S»

- Stessa relazione che intercorre tra derivata e integrale di una funzione : $g(t) = \frac{df(t)}{dt}$

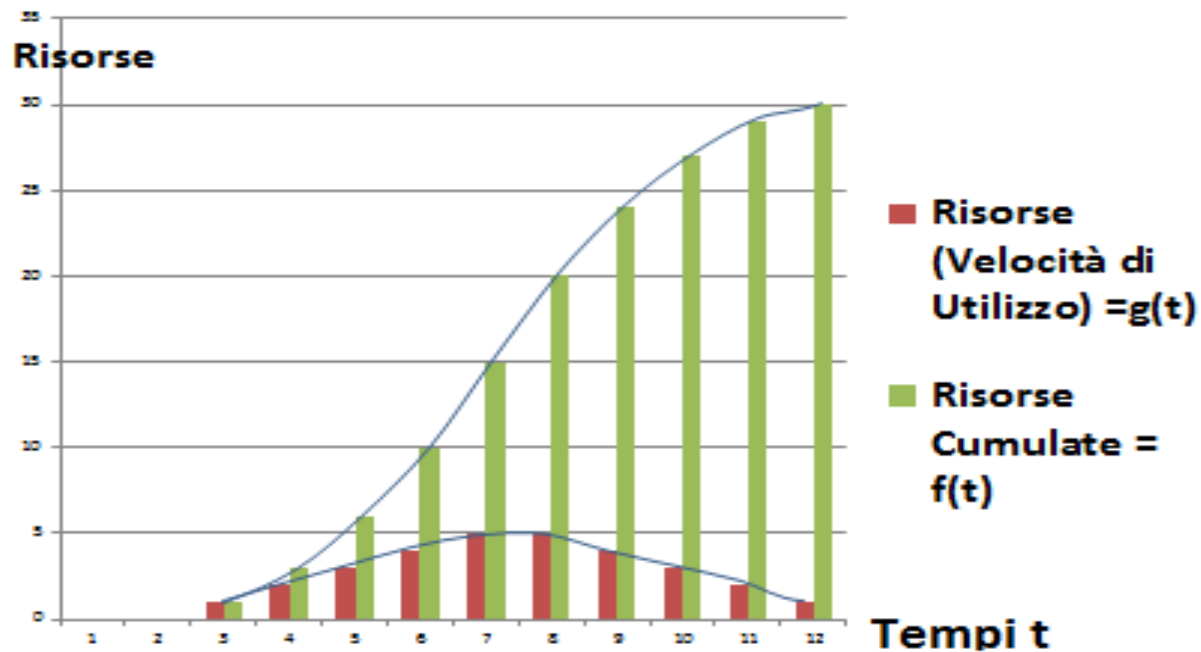


Fig. 1.a - Risorse e Risorse Cumulate

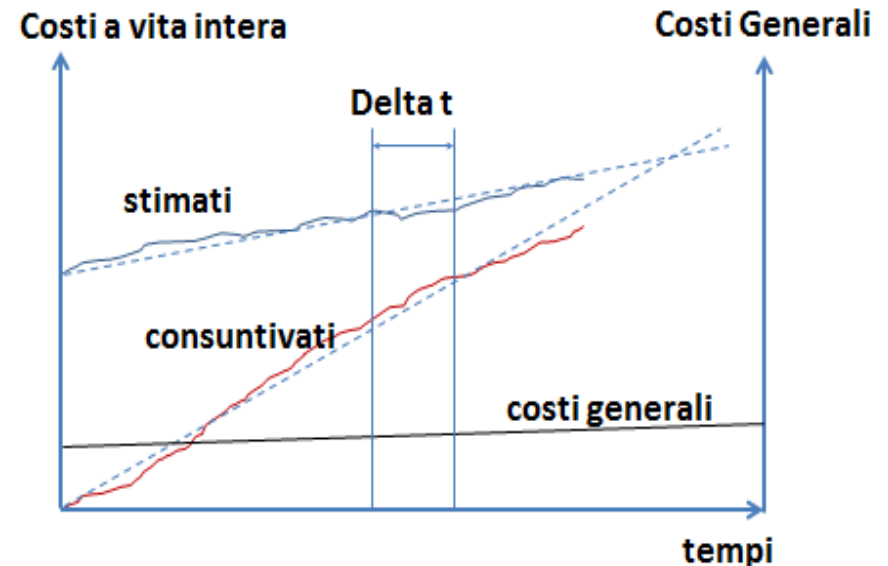


In caso di lunghe durate l'andamento a «S» non è sempre evidente, ma...

- Analisi di trend (su dati stimati e consuntivati) sono predittive per risorse (p.es. costi) e tempi di fine progetto, e per aumento costi generali ; (x=tempi; y=costi)

$$\begin{cases} y = a_1 + b_1 x \\ y = a_2 + b_2 x \end{cases}$$

- Pendenze divergenti non ammettono soluzione



Modello ideale di riferimento: Curva di Gompertz

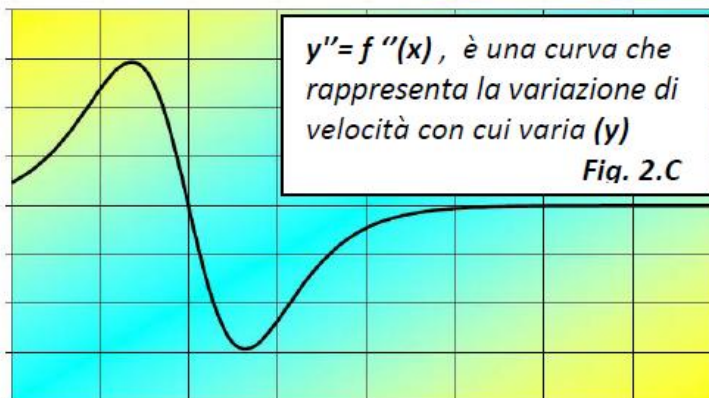
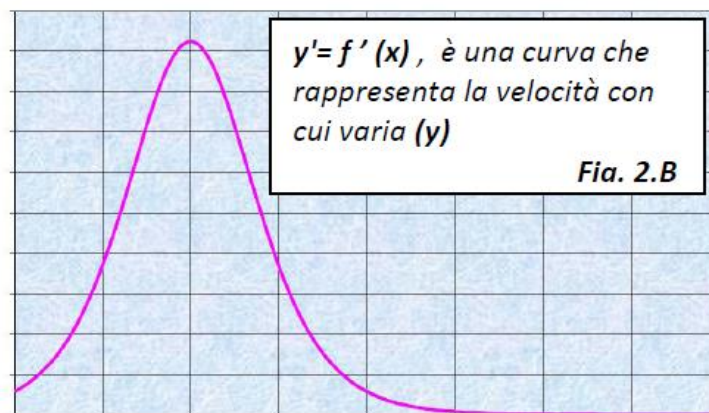
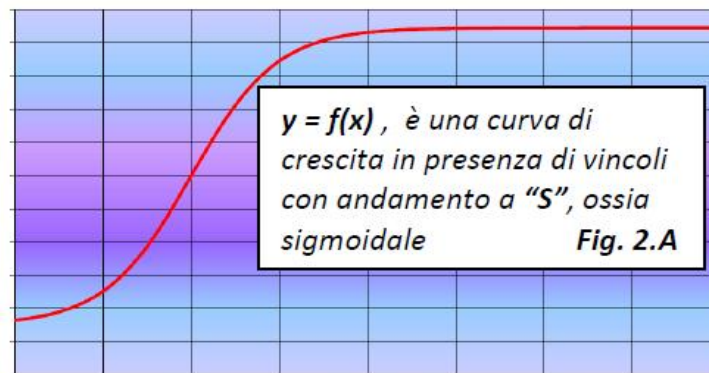
Perché «Gompertz»?

(Crescita vincolata da risorse)

Per scopi pratici la Curva di Gompertz è scritta nella forma :

$$y = ka^{b^x}$$

Il tentativo condotto nello studio è rivolto a vedere , dove l'andamento a «S» è evidente, se attraverso un «Best Fitting» (Interpolazione) si può **«conservare il modello ideale ideale».**

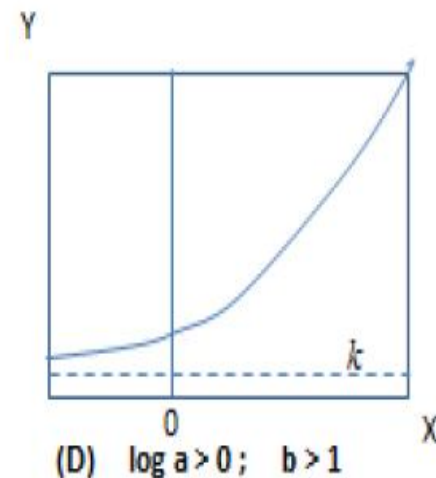
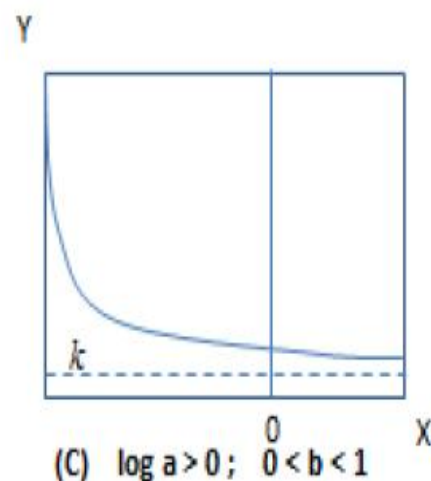
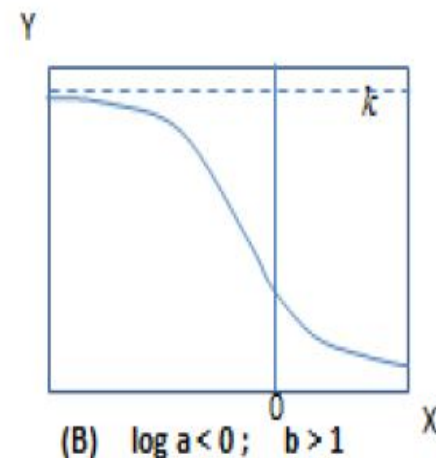
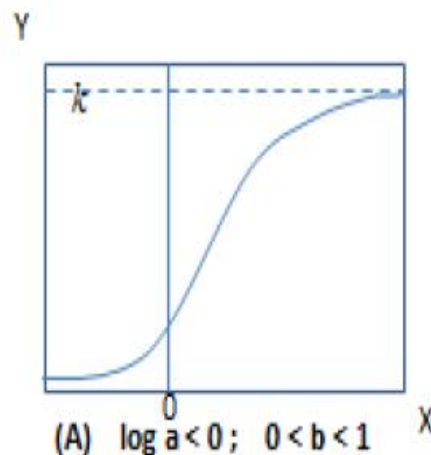




Perché la Curva di Gompertz ? Inoltre....versatilità di forma (A) e (D) !

Dipendendo dai valori (k) , (a) e (b) , può assumere una varietà di forme.

La forma **(A)** è di interesse particolare, poiché presenta un andamento asintotico superiore che indica saturazione



Fonte: J.E.Ulmann Metodi Quantitativi della Gestione Aziendale - Etas Libri



il Metodo Ulmann di Best Fitting (fonte : Collana Schaum) (M.Q.G.A.) (1)

I parametri k , a e b si ottengono nel modo seguente :

- I. Il numero delle osservazioni deve essere divisibile per 3 ossia vi sono $3n$ periodi dei dati fondamentali.*
- II. Si trasformino gli y in logaritmi.*
- III. Si sommino i primi n logaritmi di y per ottenere $\Sigma_1 \log y$; poi i successivi n dati rilevati per ottenere $\Sigma_2 \log y$; e infine si sommino gli ultimi n dati per ottenere $\Sigma_3 \log y$.*
- IV. Si noti che $x = 0$ per il primo anno.*



il Metodo Ulmann di Best Fitting (fonte : Collana Schaum (M.Q.G.A.) (2)

Si sostituiscano le seguenti formule :

$$\square b^n = \frac{\sum_3 \log y - \sum_2 \log y}{\sum_2 \log y - \sum_1 \log y}$$

$$\square \log a = (\sum_2 \log y - \sum_1 \log y) \frac{b-1}{(b^n-1)^2}$$

$$\square \log k = \frac{1}{n} \left[\sum_1 \log y - \frac{b^n-1}{b-1} \log a \right]$$

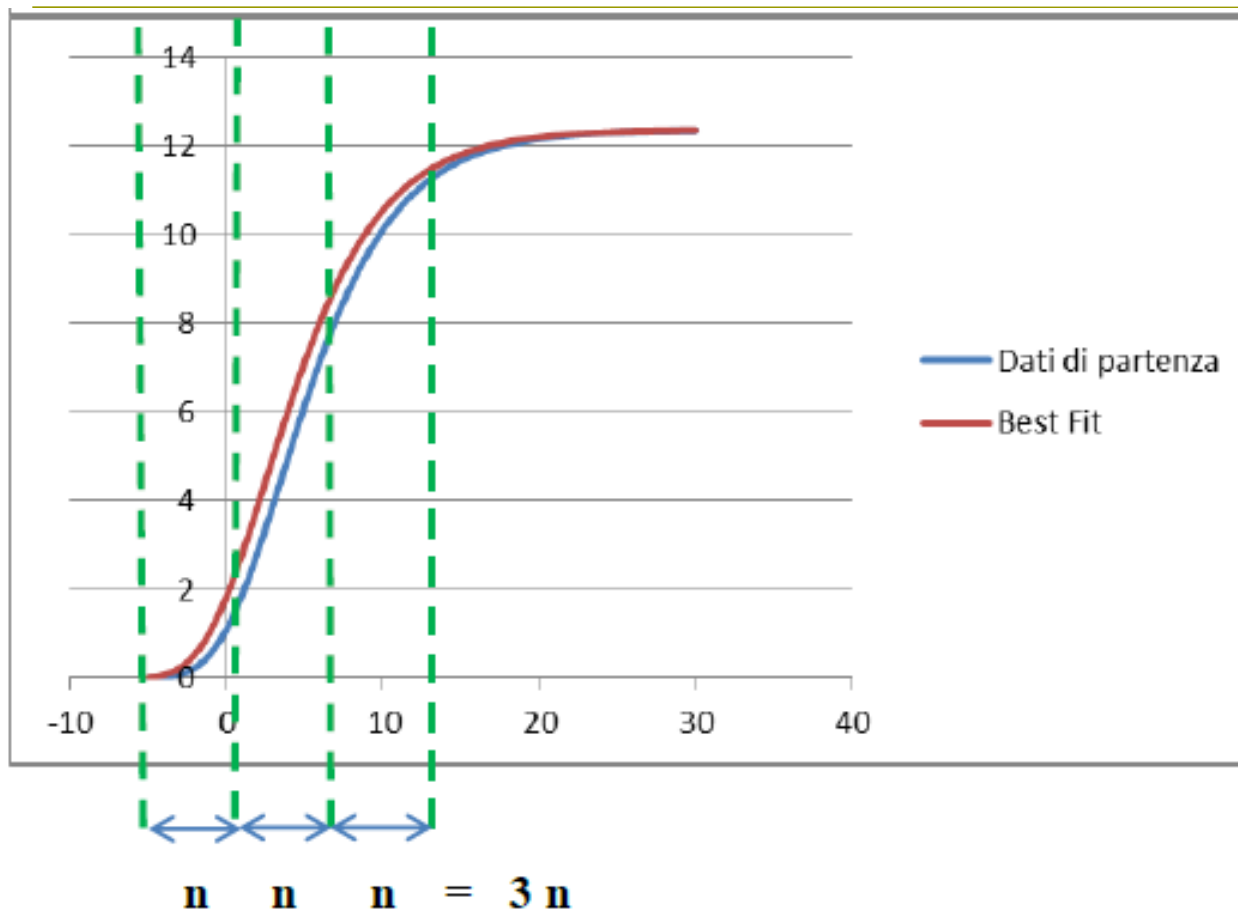
- Nella **II Parte** del *paper* presentato, l'Ing. **Lucibello** ha mostrato un metodo algebrico per ricavare queste formule; ma, non è ancora noto se è lo stesso metodo seguito dal Prof. Ulmann[†] (Hofstra Univ. N.Y.)



Prove di Best Fitting (Interpolazione) con il Metodo Ulmann hanno mostrato che:

- Il metodo lavora solo su dati (x) ma non (y);
- non fornisce una sua misura di affidabilità (da verificare sempre almeno graficamente);
- è sempre in grado di rilevare correttamente i valori dei parametri (k) (asintoto) e (b) (fattore di crescita) delle curve dei dati di partenza, indipendentemente dal posizionamento delle 3 terne contigue di dati utilizzate rispetto al “baricentro” della curva a «**S**» (punto di flesso);
- “distorce” il valore originario del parametro (a) tanto più quanto più le terne utilizzate nel best fit si riferiscono a dati che si discostano dal “baricentro” della figura e si spostano verso le parti estreme.

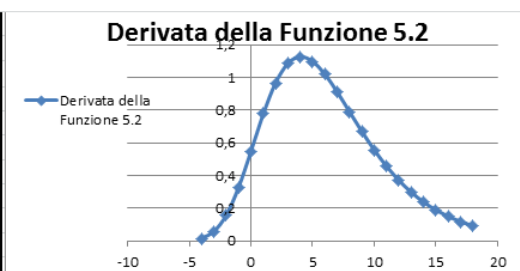
Simmetria dati rispetto al baricentro = Applicabilità del metodo Ullmann?



Nel Metodo Ullmann, la posizione del punto di inflessione non è nota prima di eseguire l'interpolazione, ma solo dopo e solo nel caso in cui tale operazione si sia dimostrata affidabile.

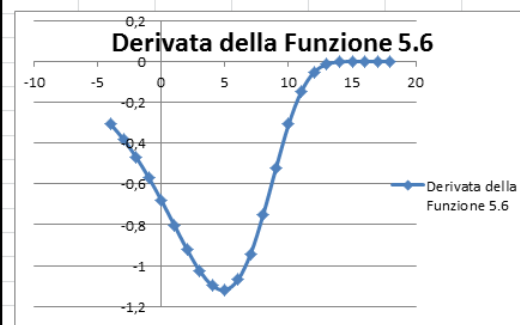
La prova : in questi casi anche il parametro (a) risulta corretto.

Terna di dati n.	Variab. Indip. x	Funzione di cui al		Rapp. Incr. Funzione di cui al	
		5.2	5.6	5.2	5.6
		$12,36*0,09^{(0,78^x)}$	$12,36*0,71^{(1,28^x)}$	Rapporto Incrementale	
1	-5	0,002950795	11,1873945		
	-4	0,018484023	10,87947373	0,015533228	-0,307920771
	-3	0,077329525	10,4976702	0,058845501	-0,381803531
2	-2	0,236131231	10,02844903	0,158801706	-0,469221166
	-1	0,564031994	9,458321142	0,327900763	-0,570127887
	0	1,1124	8,7756	0,548368006	-0,682721142
3	1	1,889416171	7,973135726	0,777016171	-0,802464274
	2	2,856140802	7,052127398	0,966724631	-0,921008328
	3	3,942322622	6,026770021	1,08618182	-1,025357377
4	4	5,06909873	4,928822075	1,126776108	-1,097947946
	5	6,167228627	3,810184873	1,098129897	-1,118637202
	6	7,186448232	2,740600738	1,019219605	-1,069584136
5	7	8,097020125	1,797535243	0,910571893	-0,943065494
	8	8,886643008	1,047663753	0,789622883	-0,749871491
	9	9,555633761	0,524951141	0,668990753	-0,522712612
6	10	10,11221909	0,216763921	0,556585333	-0,308187219
	11	10,56876669	0,069871198	0,456547592	-0,146892724
	12	10,9391361	0,016403499	0,370369418	-0,053467698
7	13	11,23701146	0,002566573	0,297875354	-0,013836927
	14	11,47497389	0,000238895	0,237962433	-0,002327677
	15	11,66407744	1,14377E-05	0,189103547	-0,000227457
8	16	11,81373898	2,33835E-07	0,149661543	-1,12039E-05
	17	11,93180681	1,60857E-09	0,118067829	-2,32227E-07
	18	12,02471826	2,74459E-12	0,092911452	-1,60583E-09
9	19	12,09769116	7,86116E-16	0,072972893	-2,74381E-12
	20	12,1549173	2,29329E-20	0,057226141	-7,86094E-16
	21	12,19974154	3,59436E-26	0,044824244	-2,29328E-20
10	22	12,23481917	1,33484E-33	0,035077631	-3,59436E-26
	23	12,26224972	4,11894E-43	0,027430553	-1,33484E-33
	24	12,28368824	2,76159E-55	0,021438517	-4,11894E-43
11	25	12,3004363	7,22636E-71	0,01674806	-2,76159E-55
	26	12,31351564	8,19694E-91	0,013079337	-7,22636E-71
	27	12,32372718	2,4194E-116	0,010211537	-8,19694E-91
12	28	12,33169805	5,0744E-149	0,007970877	-2,4194E-116
	29	12,33791892	7,5357E-191	0,006220863	-5,0744E-149
	30	12,34277337	2,1725E-244	0,004854452	-7,5357E-191



Per la funzione di cui al 5.2 il flesso è collocato in un intorno dx di x=5

Per la funzione di cui al 5.6 il flesso è collocato in un intorno dx di x=5



Terne di dati disposte simmetricamente (giallo/blu) rispetto al punto di inflessione.



Rilievi Conclusivi

- Il Metodo Ulmann appare applicabile affidabilmente a fenomeni soggetti a crescita (o decrescita) vincolata per i quali è noto già per altra via che la crescita (o decrescita) segue la legge di Gompertz (per es. accrescimento cellulare, saturazione di mercato, etc.).
- In questi casi un rilievo di dati anche in fasi molto iniziali del fenomeno porta a stimare correttamente sia il valore dell'asintoto (**k**), sia il fattore di crescita (**b**).



Ringraziamenti

- Grazie ad AICE, ai suoi Organi Direttivi, agli Associati e a Voi tutti qui presenti per la Vostra attenzione.

- Grazie all'Associazione Ambiente e Società e al Suo Presidente che ha sostenuto la partecipazione a questo evento.