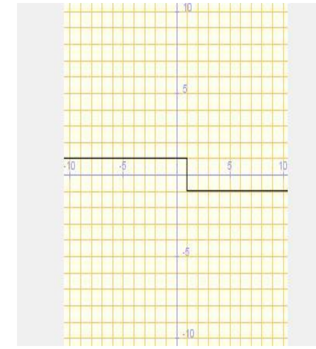
Esempi di funzioni con discontinuità di prima specie

$$\frac{\sqrt{x^2 - 2x + 1}}{1 - x}$$

$$\frac{\sqrt{x^2 - 2x + 1}}{1 - x^2}$$



DISCONTINUITA' DI PRIMA SPECIE

Sia data la $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-2\cdot x+1}}{1-x}$ irrazionale fratta :

la funzione è definita per $x-1 \neq 0$ e per $x^2-2\cdot x+1 \geq 0$

risolvere $(x-1=0) \rightarrow \{\{x=1\}\}$

risolvere $(x^2-2\cdot x+1=0) \rightarrow \{\{x=1\}\}$

tracciare $(x^2-2\cdot x+1) \rightarrow$ tracciante1

N.B.: trattandosi di equazione di 2° grado (quindi con 2 soluzioni), le due soluzioni coincidenti $x=1$ significano che la parabola $x^2-2\cdot x+1$è tangente all' asse x in $x=1$;

la f(x) esiste su tutto il campo reale ad eccezione $x=1$

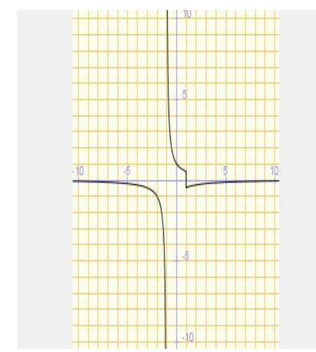
$$\lim_{x \to 1^+} \frac{\sqrt{x^2-2\cdot x+1}}{1-x} \rightarrow -1$$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{\sqrt{x^2-2\cdot x+1}}{1-x} \rightarrow 1$$

la f(x) è una funzione con una discontinuità di prima specie perchè i suoi limiti destro e sinistro calcolati per x che tende a 1 sono diversi

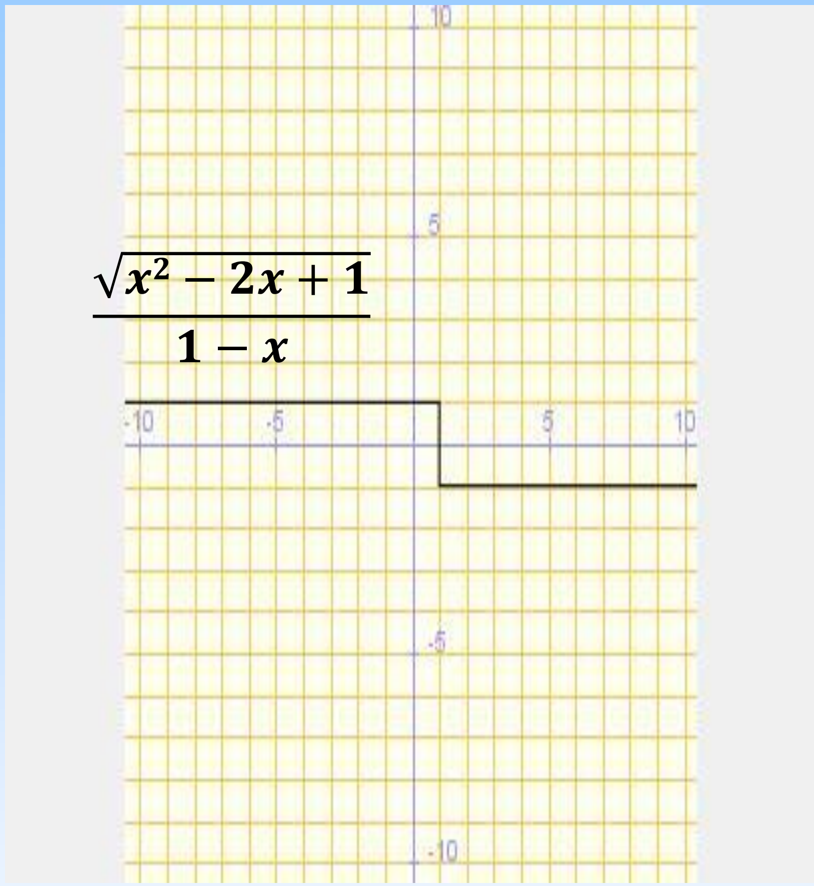
A titolo di esempio si riporta il grafico della funzione $\frac{\sqrt{x^2-2\cdot x+1}}{1-x^2}$ in cui sono presenti una discontinuità di prima specie in $x=1$ essendo ivi il limite destro e sinistro diverso, ma anche una discontinuità di sseconda specie essendovi una discontinuità in $x=-1$

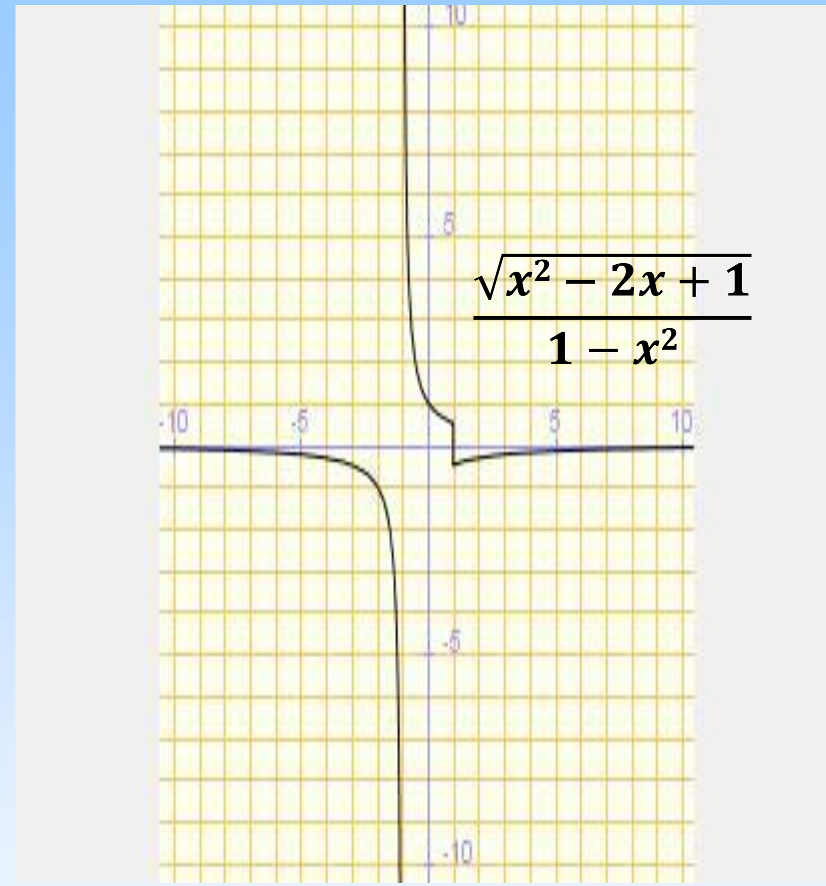
tracciare $\left(\frac{\sqrt{x^2-2\cdot x+1}}{1-x^2}\right) \rightarrow$ tracciante1



$$\lim_{x \to 1^+} \frac{\sqrt{x^2-2\cdot x+1}}{1-x^2} \rightarrow -\frac{1}{2}$$

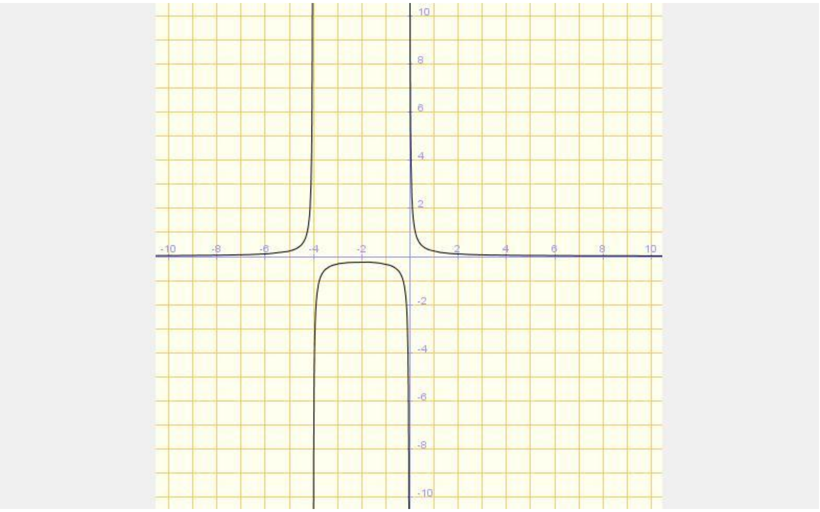
$$\lim_{x \to 1^-} \frac{\sqrt{x^2-2\cdot x+1}}{1-x^2} \rightarrow \frac{1}{2}$$





Grafici relativi agli esempi forniti sopra di discontinuità di prima specie (il limite destro e quello sinistro in un certo punto di ascissa x sono diversi).

DISCONTINUITA' DI SECONDA SPECIE



ESEMPIO N. 1 $f(x) = \frac{1}{x^2+4\cdot x}$

1° PASSO : DOMINIO

$x^2+4\cdot x \neq 0$

risolvere $(x^2+4\cdot x=0) \rightarrow \{\{x=-4\},\{x=0\}\}$

la f(x) non è definita nei punti $x=-4$ e $x=0$

2° PASSO : ASINTOTI

si vanno a verificare i limiti della funzione quando x tende ai punti di indefinizione;
se in essi si trova un infinito si tratta allora di asintoti verticali:

$$\lim_{x\to -4} \frac{1}{x^2+4\cdot x} \rightarrow \pm\infty$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2+4\cdot x} \rightarrow \pm\infty$$

$x=-4$ e $x=0$ sono dunque asintoti verticali;

si cerca il limite per x che tende a infinito per trovare asintoti orizzontali :

$$\lim_{x\to \pm\infty} \frac{1}{x^2+4\cdot x} \rightarrow 0$$

in questo caso $f(x)=0$ quando $x=\pm\infty$, quindi l'asse y è un asintoto orizzontale.

3° PASSO :SEGNO

Per la ricerca degli intervalli di positività si pone $f(x)>0$: ; quindi (siccome al numeratore di $f(x)$ c'è $+1$,

occorre cercare ove $x^2+4\cdot x>0$; si tratta di una parabola con la concavità rivolta verso l'alto che interseca l'asse delle x nei punti -4 e 0; quindi la $f(x)$ è positiva per $x<-4$ e e per $x>0$, mentre è negativa nell'intervallo $x=-4$ e $x=0$

tracciare$(x^2+4\cdot x)$ $\rightarrow$ tracciante1

4° PASSO :INTERSEZIONE CON GLI ASSI

Intersezione con asse x :

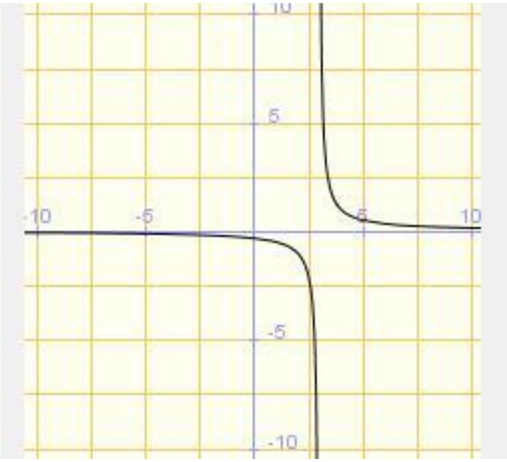
si pone $x=0$ e si trovano i valori di $f(x)$; ma in questo caso si ha infinito;
(ciò significa che l'asse delle ordinate è un asintoto)

Intersezione con asse y :

si pone $f(x)=0$ e si trova il valore di x; ma in questo caso si ha infinito

tracciare$\left(\dfrac{1}{x^2+4\cdot x}\right)$ $\rightarrow$ tracciante1

ESEMPIO N. 2 $f(x) = \frac{1}{x-3}$



1° PASSO : DOMINIO

$x - 3 \neq 0$

risolvere $(x-3=0) \rightarrow \{\{x=3\}\}$

la f(x) non è definita nel punto x=3

2° PASSO : ASINTOTI

si vanno a verificare i limiti della funzione quando x tende ai punti di indefinizione;
se in essi si trova un infinito si tratta allora di asintoti verticali:

$$\lim_{x \to 3} \frac{1}{x-3} \rightarrow \pm\infty$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x-3} \rightarrow 0$$

in x=3 si registra un asintoto verticale visto che la f(x) in quel punto è infinito;
mentre il fatto che al tendere di x all'infinito si registri che f(x)=0 signfica (y=0)che
l'asse x è un asintoto della funzione.

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x-3} \rightarrow -\frac{1}{3}$$

il limite di $-\frac{1}{3}$ sopra calcolato per x che tende a zero indica una intersezione sull'asse y.

3° PASSO : SEGNO

Per la ricerca degli intervalli di positività si pone $f(x)>0$: ; quindi (siccome al numeratore di f(x) c'è $+1$,

occorre cercare ove il denominatore $x-3>0$; per ogni x inferiore a $+3$ il denominatore è negativo e quindi f(x) è negativa per $x<+3$; per ogni valore di x superiore a $+3$ il denominatore è positivo e quindi la f(x) è positiva per $x>+3$.

4° PASSO : INTERSEZIONE CON GLI ASSI

Intersezione con asse x :

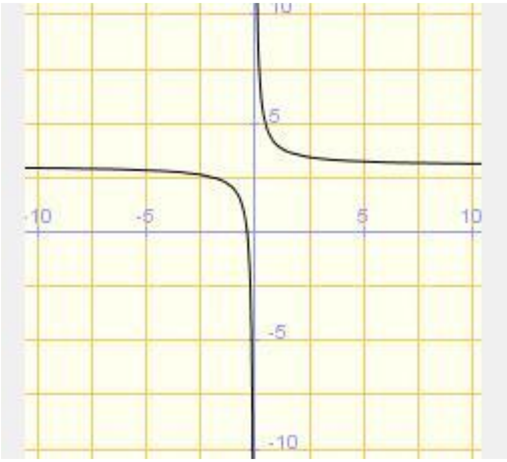
si pone $x=0$ e si trovano i valori di f(x); in questo caso si ha $f(x)=-\frac{1}{3}$;

Intersezione con asse y :

pone $f(x)=0$ e si trova il valore di x; in questo caso significa cercare ove il denominatore $x-3=\pm\infty$ e quindi $x=\pm\infty$, cosa che conferma la non esistenza di intersezione con l'asse x trattandosi di un asintoto

tracciare$\left(\frac{1}{x-3}\right) \rightarrow$ tracciante1

ESEMPIO N. 3 $f(x) = \frac{1}{x} + 3$ **(più brevemente)**



$x \neq 0 \rightarrow x \neq 0$

risolvere$\left(\frac{1}{x} + 3 = 0\right) \rightarrow \left[\left[x = -\frac{1}{3}\right]\right]$

la f(x) si annulla in $x = -\frac{1}{3}$, quindi interseca l'asse x in questo punto

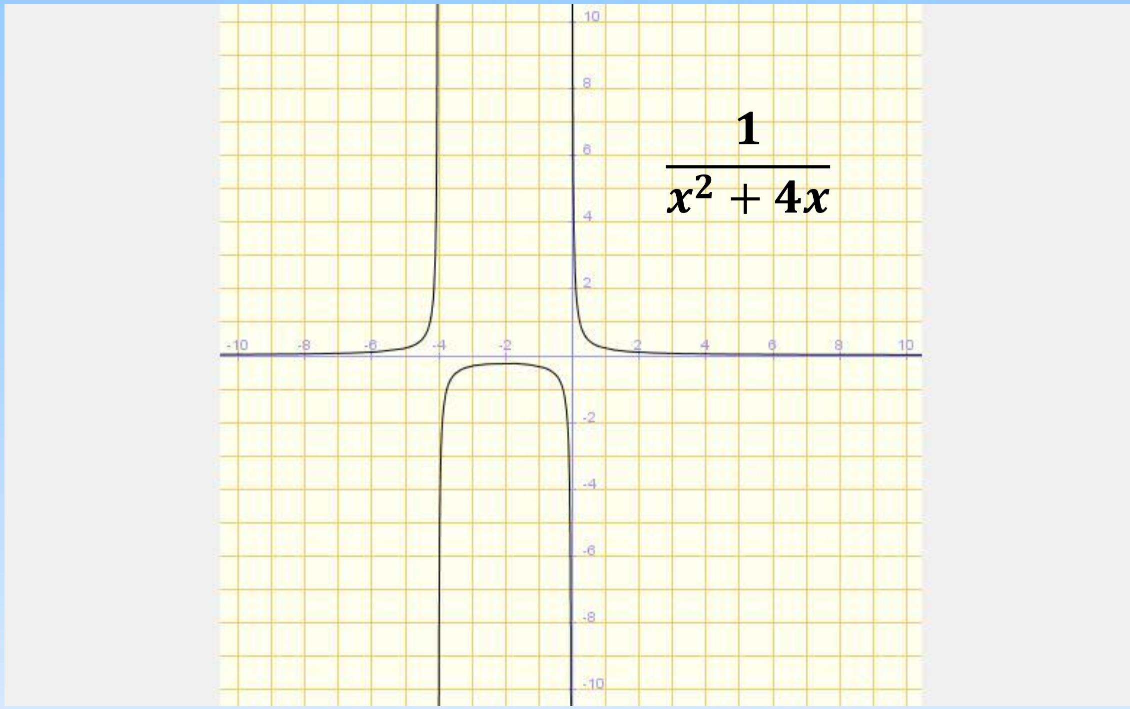
$\lim_{x \to -1/3} \frac{1}{x} + 3 \rightarrow 0$

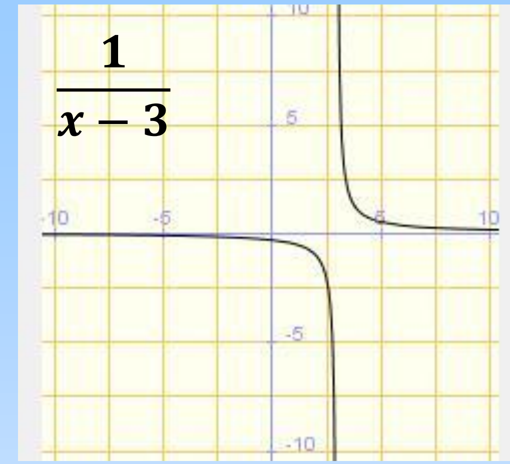
$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} + 3 \rightarrow \pm\infty$

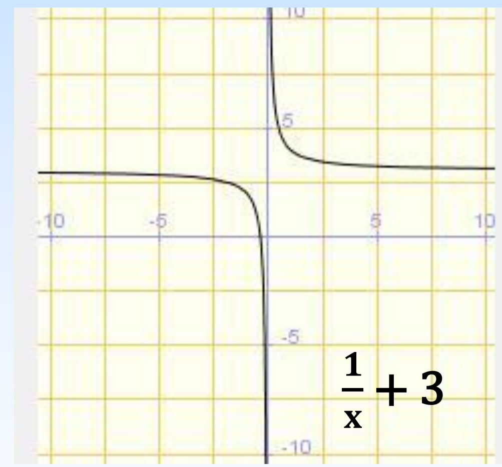
$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x} + 3 \rightarrow 3$

la f(x) non è definita in x=0 (asintoto verticale) e nel punto y=3 (asintoto orizzontale); infatti:

tracciare$\left(\frac{1}{x} + 3\right) \rightarrow$ tracciante1







Grafici relativi agli esempi di discontinuità di seconda specie forniti sopra [la f(x) va all’infinito per un determinato valore di x]

Esempi di funzioni con discontinuità di terza specie

$$e^{-\frac{1}{x^2}}$$

$$\frac{e^x - 1}{x}$$

$$\frac{sin\,(x)}{x}$$

DISCONTINUITA' DI TERZA SPECIE

ESEMPIO N.1 : $f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}$

$\lim_{x\to 0^-} e^{\frac{-1}{x^2}} \to 0$

$\lim_{x\to 0^+} e^{\frac{-1}{x^2}} \to 0$

sebbene esistano i limiti destro e sinistro della funzione per x che tende a zero, la funzione in 0 non è "calcolabile" perchè indefinita. Infatti:

$e^{\frac{-1}{0^2}}$ =indeterminato

Questa discontinuità si "elimina" ponendo $f(x) = 0$ nel punto $x=0$ (ovvero si pone che $f(x)$ in 0 è uguale al suo limite per $x\to 0$; in questo modo la discontinuità si può dire "eliminata".

Conseguentemente, in questo modo, essa esisterà e sarà definita in tutto il campo reale ivi compreso il punto $x=0$.

tracciare$\left(e^{\frac{-1}{x^2}}\right) \to$ tracciante1

I casi che seguono sono analoghi.

ESEMPIO N.2 : $f(x)=\frac{e^x-1}{x}$

$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x-1}{x} \to 1$

$\lim_{x\to 0^-} \frac{e^x-1}{x} \to 1$

$\frac{e^0-1}{0}$ = indeterminato

La discontinuità si elimina ponendo $f(x)$ in $x=0$ uguale al suo limite ovvero $f(x)=1$

tracciare$\left(\frac{e^x-1}{x}\right) \to$ tracciante1

ESEMPIO N.3 : $f(x)=\frac{\sin x}{x}$

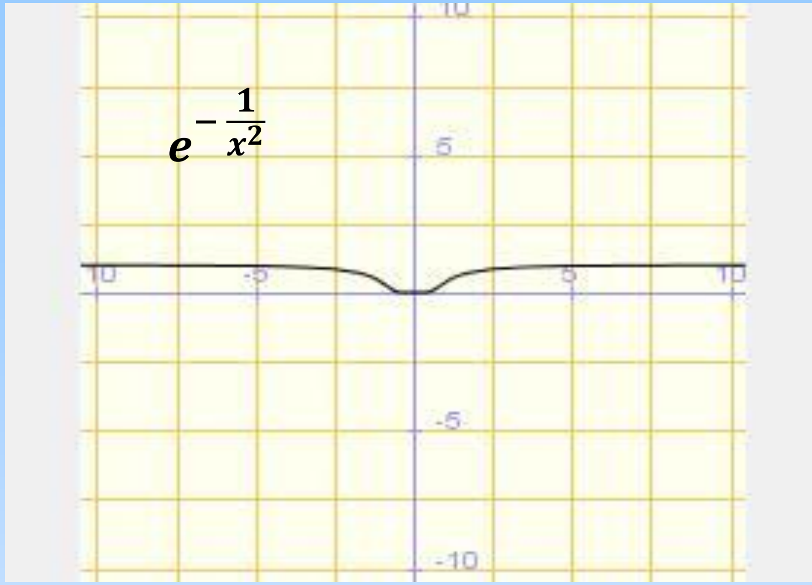
$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} \to 1$

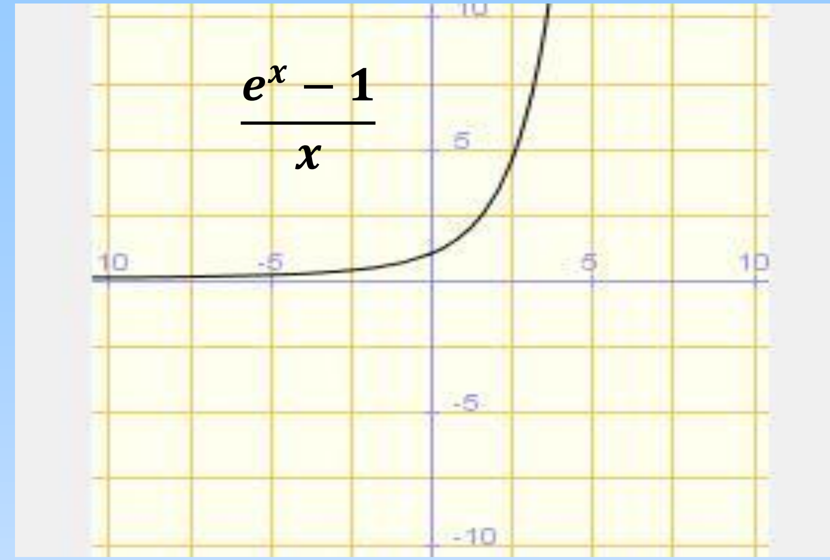
$\lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{x} \to 1$

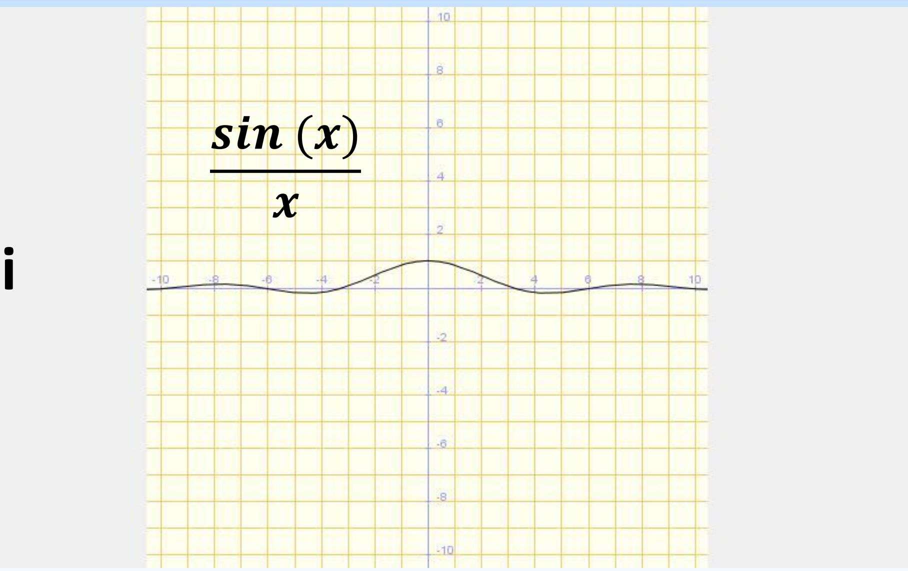
$\frac{\sin 0}{0}$ =Indeterminato

La discontinuità si elimina ponendo $f(x)$ in $x=0$ uguale al suo limite ovvero $f(x)=1$

tracciare$\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) \to$ tracciante1







Grafici relativi agli esempi di discontinuità di terza specie forniti sopra
[la f(x) ha limite destro e sinistro uguali in x ma in x il suo valore è indeterminato]